# Γραμμικά συστήματα

## Γραμμική Εξίσωση

$y=3x+2 \Leftrightarrow 3x-y=-2$

$3x-y^2=2$ δεν είναι γραμμική εξίσωση, λόγω αυτού

$a_1x_1+a_2x_2+\dots+a_nx_n=b_1$ $\quad a_1,a_2,\dots,a_n,b_1\in\mathbb{R}$ σταθερά

$x_1,x_2,\dots,x_n$ άγνωστοι ή μεταβλητές

Η λύση της γραμμικής εξίσωσης $a_1x_1+\dots+a_nx_n=b_1$ είναι μια $n$-άδα αριθμών $(c_1,c_2,\dots,c_n)$ ώστε να επαληθεύουν την εξίσωση $a_1c_1+a_2c_2+\dots+a_nc_n=b_1$

(Πρέπει να βρω $n$ αριθμούς (διατεταγμένους) που να μου επαληθεύουν την εξίσωση)

τυχαία επιλογή

π.χ. $3x-y=-2$ $\quad (0,2), \left(-\frac{2}{3},0\right), (1,5)$

Δεν είναι μοναδική η λύση

Ένα γραμμικό σύστημα θα είναι ένα σύνολο γραμμικών εξισώσεων.

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=2 \\ 2x-y+7z=0 \\ 3y-z=5 \\ 10x+y+z=7 \end{array}\right\}$$

$a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n = \boxed{b_1}$

συντελεστές

σταθεροί όροι

$a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,n}x_n = \boxed{b_2}$

$a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \dots + a_{m,n}x_n = b_m$

δηλώνει το πλήθος των εξισώσεων

Αυτό είναι ένα γραμμικό σύστημα m εξισώσεων με n αγνώστους

Μια λύση του θα είναι μια n-άδα αριθμών $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ οι οποίοι επαληθεύουν όλες τις εξισώσεις $a_{1,1}, a_{1,2}, \dots, a_{m,n}, b_1, b_m \in \mathbb{R}$

$b_1, b_m$ καλούνται σταθεροί όροι. Οι $a_{1,1}, a_{m,n}$ καλούνται συντελεστές των αγνώστων κ' είναι mn το πλήθος

$x+y+z=2$
$x+y+z=1$

Δεν έχει λύση, άρα τα συστήματα δεν έχουν πάντα λύση. Περιγράφει 2 παράλληλα επίπεδα που το ένα διέρχεται από το 2 κ' το άλλο από το 1.

$x+y+z=2$
$x-y=1$

λύση $(2,1,-1)$

$x+y+z=2 \Rightarrow \boxed{1+y}+y+z=2 \Rightarrow z=1-2y$
$x-y=1 \Rightarrow \boxed{x=1+y}$

$z=1-2y$

$x, y, z$

Για $y=0$ $(1,0,1)$
$y=-1$ $(0,-1,3)$

άπειρες λύσεις

Γεωμετρικά η λύση είναι μία ευθεία

$x+y=0 \Rightarrow x=-y$
$x+2y=1 \Rightarrow -y+2y=1 \Rightarrow y=1 \Rightarrow x=-1$

Μοναδική

Ένα γραμμικό σύστημα μπορεί να μην έχει λύση, να έχει άπειρες λύσεις ή να έχει μοναδική λύση

Επίλυση συστήματος

$$\left.\begin{array}{l} x+3y=7 \\ x-2y+6z=2 \end{array}\right\}$$ Απαλοιφή του Gauss

Θα αφαιρέσουμε την πρώτη από τη δεύτερη

$x+3y=7$ (1)

$$\begin{array}{l} x-2y+6z=2 \\ -x-3y=-7 \\ \hline \end{array}$$

$x-x-2y-3y+6z=-2-7 \Rightarrow$

$\Rightarrow -5y+6z=-9$ (2)

(1),(2) $\left.\begin{array}{l} x+3y=7 \\ -5y+6z=-9 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} x+3y=7 \\ y-\frac{6}{5}z=\frac{9}{5} \\ \hline \end{array}$ τα πολλαπλασιάζω με το $-3$ και $+$

$x+\cancel{3y}-\cancel{3y}+\frac{18}{5}z=7+\frac{-27}{5}$

$y-\frac{6}{5}z=\frac{9}{5}$

$$\begin{array}{l} x+\frac{18}{5}z=\frac{8}{5} \Rightarrow \\ y-\frac{6}{5}z=\frac{9}{5} \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x=-\frac{18}{5}z+\frac{8}{5} \\ y=\frac{6}{5}z+\frac{9}{5} \end{array}}$$ $\forall z \in \mathbb{R}$ έχουμε λύση

$\longleftrightarrow$

$$\begin{array}{l} x_1+3x_2-2x_3 \qquad\qquad +2x_5=0 \\ 2x_1+6x_2-5x_3-2x_4+4x_5-3x_6=-1 \\ \qquad\qquad 5x_3+10x_4 \qquad +15x_6=5 \\ 2x_1+6x_2 \qquad\qquad +8x_4+4x_5+18x_6=6 \\ \hline \end{array}$$

$x_1+3x_2-2x_3 \qquad +2x_5=0$

$2x_1-2x_1+\cancel{6x_2}-6x_2-5x_3+4x_3-2x_4+4x_5-4x_5-3x_6=-1$ $(2-4)$;

$-x_3-2x_4=-1$

$5x_3+10x_4+15x_6=5$

$2x_1-2x_1+6x_2-6x_2+4x_3+8x_4+\cancel{4x_5-4x_5}+18x_6=6$

$$
\begin{aligned}
x_1+3x_2 \cancel{-2x_3+2x_3}+2x_5 &= 0\\
x_3+2x_4 \qquad +3x_6 &= -1\\
5x_3+10x_4 \qquad +15x_6 &= 5\\
4x_3+8x_4 \qquad +18x_6 &= 6
\end{aligned}
$$

Πολ/ζει κ' κάνει πράξεις (με αντίστροφους;;)

$$
\begin{aligned}
x_1+3x_2-2x_3+4x_4+2x_5+6x_6 &= 2\\
x_3+2x_4+ \qquad +3x_6 &= -1\\
5x_3-5x_3+10x_4-10x_4+\cancel{15x_6-15x_6} &= 10\\
4x_3-4x_3+8x_4-8x_4 \qquad +16x_6-12x_6 &= 10\\
4x_6 &= 10
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{
\begin{aligned}
x_1+3x_2+ \qquad +4x_4+2x_5+6x_6 &= 2\\
x_3+2x_4 \qquad +3x_6 &= -1\\
x_6 &= \frac{5}{2}
\end{aligned}}
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
x_1+3x_2+ \quad 4x_4+2x_5 &= -2-15\\
x_3+2x_4 &= -1-\frac{15}{2}\\
x_6 &= \frac{5}{2}
\end{aligned}
\right\}
$$

Δεν μπορούμε να το πειράξουμε, είναι η λύση μας.

$$x_6=\frac{5}{2}$$

$$x_3=\frac{-17}{2}-2x_4$$

$$x_1=-17-3x_2-4x_4-2x_5$$

$x_2, x_4, x_5$ λαμβάνουν όποια τιμή θέλουν

Άσκηση: Να λυθεί το σύστημα:

$z \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{l|l|l|l|l|l}
(1)\ x+4y+z=2 & x+4y+z=2 & x+4y+z=2 & x+4\left(-\frac{2}{3}\right)+z=2 & x+z=2+\frac{8}{3} & x=\frac{14}{3}-z \\
(2)\ x+y+z=4 & -3y=2 & y=-\frac{2}{3} & y=-\frac{2}{3} & y=-\frac{2}{3} & y=-\frac{2}{3}
\end{array}$$

$(2)-(1)$

$$\begin{array}{l|l}
x+4y+z=2 & x-y+z=1 \\
x+y+z=4 & x+y+z=4 \\
x-y+z=1 &
\end{array}$$